☆ ۳-۶ میانه، مُد و چندک‌ها

۱) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته و $\varphi(x)$ تابع چگالی آن باشد، آن‌گاه از حل هر یک از معادله‌های زیر میانه به‌دست خواهد آمد:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} \varphi(x)dx = \int_{t}^{+\infty} \varphi(x)dx = \frac{۱}{۲} \; ; \; t = me}$$

یا اگر تابع توزیع $F(x)$ را برابر $\frac{۱}{۲}$ قرار دهیم، از حل معادله‌ی زیر، میانه به‌دست می‌آید:

$$\boxed{F(x) = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow x = me}$$

۲) اگر X متغیر تصادفی پیوسته و $\varphi(x)$ تابع چگالی آن باشد، آن‌گاه مشتق تابع چگالی احتمال را برابر صفر قرار می‌دهیم و از حل این معادله مُد یا نما به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\varphi'(x) = ۰ \Longrightarrow x = mo}$$

۳) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته و $\varphi(x)$ تابع چگالی و $F(x)$ تابع توزیع آن باشد. آن‌گاه برای یافتن چندک k از مرتبه i، (Q_{ik}) به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{Q_{ik}} \varphi(x)dx = \frac{i}{k} \, , \, \int_{Q_{ik}}^{+\infty} \varphi(x)dx = ۱ - \frac{i}{k}}$$

مثال ۳۹ تابع توزیع متغیر تصادفی X به‌صورت زیر به‌دست آمده است، میانه‌ی متغیر تصادفی X را محاسبه کنید.

$$F(x) = \frac{x - ۵}{۲۰} \, , \, ۵ < x < ۲۵$$

حل.

$$F(x) = \frac{۱}{۲} \; ; \; \frac{x - ۵}{۲۰} = \frac{۱}{۲} \; ; \; x = ۱۵ \; ; \; me = ۱۵$$

مثال ۴۱ تابع توزیع متغیر تصادفی X به‌صورت $F(x) = \frac{۱}{۲}x^{۲}(۳ - x)$ برای $۰ \leq x \leq ۱$ تعریف شده است. مُد یا نمای توزیع را محاسبه کنید.

حل.

$$\varphi(x) = F'(x) \ ; \ \varphi(x) = \frac{۶x - ۳x^{۲}}{۲}$$

$$\varphi'(x) = ۰ \ ; \ \frac{۶ - ۶x}{۲} = ۰ \ ; \ x = mo = ۱$$

۳-۸ تابع احتمال توأم گسسته

در بسیاری از موارد دو یا چند متغیر تصادفی به‌طور توأم (مشترک) مورد مطالعه می‌باشد. اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، توزیع احتمال برای پدیدار شدن آن‌ها را به‌طور هم‌زمان به وسیله‌ی $f(x,y)$ می‌توان نشان داد. یک جدول یا فرمول شامل فهرست تمام مقادیر ممکن x و y از متغیرهای تصادفی X و Y همراه با احتمال آن‌ها، $f(x_i, y_i)$، را یک «تابع احتمال توأم گسسته» نامند و چنین تعریف می‌کنند:

$$\boxed{P(X = x_i, Y = y_j) = f(x_i, y_j)}$$

تابع $f(x_i, y_j)$ در شرط‌های زیر صادق است:

$$\boxed{۱)\ f(x_i, y_j) \geq ۰ \qquad ۲)\ \sum_x \sum_y f(x_i, y_j) = ۱}$$

تابع احتمال توأم گسسته را به‌طور معمول به‌شکل جدول زیر معرفی می‌کنند:

$X \backslash Y$	$y_۱$	$y_۲$	$\cdots$	y_n
$x_۱$	$f(x_۱, y_۱)$	$f(x_۱, y_۲)$	$\cdots$	$f(x_۱, y_n)$
$x_۲$	$f(x_۲, y_۱)$	$f(x_۲, y_۲)$	$\cdots$	$f(x_۲, y_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	$f(x_m, y_۱)$	$f(x_m, y_۲)$	$\cdots$	$f(x_m, y_n)$

احتمال‌های خانه‌ها را اغلب به‌جای این‌که در جدول بیاورند به‌صورت فرمولی ارائه می‌دهند.

مثال ۴۶ فرض کنید تابع احتمال توأم متغیر تصادفی X و Y به‌صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = c(x+y) \quad x = ۱, ۲, ۳ \qquad y = ۱, ۲$$

مقدار ثابت c را بیابید.

حل.

$$\sum_{x=۱}^{۳} \sum_{y=۱}^{۲} c(x+y) = ۱ \; ; \; c[(۱+۱)+(۱+۲)+\cdots+(۳+۲)] = ۱ \; ; \; c = \frac{۱}{۲۱}$$

مثال ۴۷ تابع احتمال توأم زیر را در نظر بگیرید. مطلوب است:

۱) $P(X = ۲)$

۲) $P(X > Y)$

۳) $P(Y \geq ۳, X = ۴)$

$X \backslash Y$	۱	۳	۵
۲	۰/۱۰	۰/۲۰	۰/۱۰
۴	۰/۱۵	۰/۳۰	۰/۱۵

حل.

(۱

$$P(X = ۲) = P(X = ۲, Y = ۱) + P(X = ۲, Y = ۳) + P(X = ۲, Y = ۵)$$
$$= ۰/۱۰ + ۰/۲۰ + ۰/۱۰ = ۰/۴۰$$

(۲

$$P(X > Y) = P(X = ۲, Y = ۱) + P(X = ۴, Y = ۱) + P(X = ۴, Y = ۳)$$
$$= ۰/۱۰ + ۰/۱۵ + ۰/۳۰ = ۰/۵۵$$

(۳

$$P(Y \geq ۳, X = ۴) = P(X = ۴, Y = ۳) + P(X = ۴, Y = ۵)$$
$$= ۰/۳۰ + ۰/۱۵ = ۰/۴۵$$

☆ ۹-۳ تابع احتمال حاشیه‌ای

با در دست داشتن تابع احتمال توأم، می‌توان تابع احتمال جداگانه هر یک از متغیرهای تصادفی را پیدا کرد. اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند که دارای توزیع توأم هستند، آن‌گاه تابع احتمال X و تابع احتمال Y «توابع احتمال حاشیه‌ای» در رابطه با تابع احتمال توأم X و Y، نامیده می‌شوند.

۱) اگر g تابع احتمال متغیر تصادفی X باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{g(x) = \sum_{y} f(x, y)}$$

به $g(x)$ «تابع احتمال حاشیه‌ای X» گفته می‌شود.

۲) اگر h تابع احتمال متغیر تصادفی Y باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{h(y) = \sum_x f(x,y)}$$

به $h(y)$ «تابع احتمال حاشیه‌ای Y» گفته می‌شود.

مثال ۴۸ تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y توسط جدول زیر بیان شده است:

$X \backslash Y$	-۱	۰	۳
۲	۰/۱۰	۰/۴۰	۰
۴	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۱۵

۱) امید ریاضی متغیر X و امید ریاضی متغیر Y

۲) واریانس متغیر X و واریانس متغیر Y

۳) امید ریاضی $(۲X + ۳Y)$

حل. ابتدا توزیع احتمال حاشیه‌ای X و Y را پیدا می‌کنیم.

$X \backslash Y$	-۱	۰	۳	$g(x)$
۲	۰/۱۰	۰/۴۰	۰	۰/۵
۴	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۱۵	۰/۵
$h(y)$	۰/۲۵	۰/۶۰	۰/۱۵	۱

(۱

$$E(X) = \sum x \cdot g(x) = (۲ \times ۰/۵) + (۴ \times ۰/۵) = ۳$$
$$E(Y) = \sum y \cdot h(y) = (-۱ \times ۰/۲۵) + (۰ \times ۰/۶) + (۳ \times ۰/۱۵) = ۰/۲$$

(۲

$$E(X^۲) = \sum x^۲ \cdot g(x) = (۴ \times ۰/۵) + (۱۶ \times ۰/۵) = ۱۰$$
$$E(Y^۲) = \sum y^۲ \cdot h(y) = (۱ \times ۰/۲۵) + (۰ \times ۰/۶۰) + (۹ \times ۰/۱۵) = ۱/۶$$

بنابراین:

$$Var(X) = E(X^۲) - [E(X)]^۲ = ۱۰ - ۹ = ۱$$
$$Var(Y) = E(Y^۲) - [E(Y)]^۲ = ۱/۶ - ۰/۰۴ = ۱/۵۶$$

(۳

$$E(۲X + ۳Y) = ۲E(X) + ۳E(Y) = (۲ \times ۳) + (۳ \times ۰/۲) = ۶/۶$$

۳-۱۱ مستقل بودن دو متغیر تصادفی

اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند که دارای توزیع توأم $f(x,y)$اند، آن‌گاه در صورتی دو متغیر تصادفی X و Y مستقل از یک‌دیگرند که اگر و فقط اگر توزیع توأم آن‌ها برابر با حاصل‌ضرب توزیع‌های حاشیه‌ای آن‌ها باشد. یعنی:

$$\boxed{f(x,y) = g(x) \cdot h(y)}$$

نکته ۱۴ برای تعیین این‌که آیا دو متغیر تصادفی X و Y مستقل از یک‌دیگرند یا نه، باید شرط استقلال یعنی رابطه‌ی بالا را برای یکایک توزیع‌های توأم بررسی کنیم. اگر رابطه‌ی بالا برای همه‌ی $f(x,y)$ها صادق باشد، نتیجه‌گیری می‌کنیم که X و Y مستقل از یک‌دیگرند. ولی برای نقض آن کافی است یک مورد نقض پیدا کنیم.

مثال ۵۰ جدول احتمال توزیع زیر در دست است. آیا X و Y مستقل‌اند؟

$X \backslash Y$	۰	۲	۳
۱	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۲
۳	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۱

حل. ابتدا توزیع‌های حاشیه‌ای X و Y را پیدا می‌کنیم. چون به‌عنوان مثال $۰٫۱ \neq ۰٫۵ \times ۰٫۴$، بنابراین X و Y مستقل نیستند.

$X \backslash Y$	۰	۲	۳	$g(x)$
۱	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۵
۳	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۵
$h(y)$	۰٫۴	۰٫۳	۰٫۳	۱

۳-۱۴ کوواریانس

«کوواریانس» شاخصی است که نوع و شدت وابستگی خطی بین دو متغیر X و Y را مشخص می‌کند. وابستگی بین دو متغیر می‌تواند به یکی از سه حالت زیر باشد:

- با افزایش یک متغیر، دیگری افزایش یابد و با کاهش آن، دیگری کاهش یابد (وابستگی مستقیم).
- با افزایش یک متغیر، دیگری کاهش یابد و با کاهش آن، دیگری افزایش یابد (وابستگی معکوس).
- افزایش و یا کاهش یک متغیر، هیچ تأثیری در دیگری نداشته باشد (دو متغیر مستقل باشند).

اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند، آن‌گاه کوواریانس X و Y که به‌صورت $Cov(X,Y)$ نمایش داده می‌شود، چنین است:

$$Cov(X,Y) = \sum_{x}\sum_{x}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)f(x,y)$$

با استفاده از نماد امید ریاضی می‌توان نوشت:

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به‌صورت زیر درآورد:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

که در این رابطه اگر X و Y گسسته باشند، آن‌گاه:

$$E(XY) = \sum_{x}\sum_{y} xy \cdot f(x,y)$$

نکته ۱۶ کوواریانس بیانگر تغییرات هم‌زمان X و Y است؛ بنابراین:

- اگر ۰ < $Cov(X,Y)$، آن‌گاه تغییرات X و Y هم‌جهت است (وابستگی مستقیم).
- اگر ۰ > $Cov(X,Y)$، آن‌گاه تغییرات X و Y عکس هم است (وابستگی معکوس).
- اگر ۰ = $Cov(X,Y)$، آن‌گاه X و Y هیچ گونه وابستگی خطی با یک‌دیگر ندارند (مستقل).

بنابراین، علامت کوواریانس نشان‌گر این است که آیا شیب خطی که رابطه‌ی خطی بین دو متغیر تصادفی را معرفی می‌کند، مثبت یا منفی است. به‌علاوه، هرچه مقدار عددی کوواریانس از لحاظ قدرمطلق بیش‌تر باشد میزان تناظر خطی بیش‌تر خواهد بود و اگر مقدار کوواریانس نزدیک به صفر باشد تناظر خطی کم‌تر خواهد بود. وقتی که X و Y مستقل از هم‌اند نشان داده می‌شود که کوواریانس بین آن‌ها صفر است. ولی عکس این مطلب لزوماً درست نیست.

صفر بودن کوواریانس فقط نشان دهنده عدم وابستگی خطی (استقلال خطی) دو متغیر تصادفی است و دو متغیر می توانند به صورت غیر خطی به هم وابسته باشند.

مثال ۵۳ توزیع احتمال توأم دو متغیر X و Y به‌صورت جدول زیر است:

$X \backslash Y$	۰	۱	$g(x)$
۰	۰٫۰۵	۰٫۱۸	۰٫۲۳
۱	۰٫۲۲	۰٫۳۵	۰٫۵۷
۲	۰٫۱۵	۰٫۰۵	۰٫۲۰
$h(y)$	۰٫۴۲	۰٫۵۸	۱

مطلوب است $Cov(X,Y)$. درباره‌ی ارتباط این دو متغیر توضیح دهید.

حل.

$$E(X) = \sum x \cdot g(x) = (۰ \times ۰٫۲۳) + (۱ \times ۰٫۵۷) + (۲ \times ۰٫۲۰) = ۰٫۹۷$$

$$E(Y) = \sum y \cdot h(y) = (۰ \times ۰٫۴۲) + (۱ \times ۰٫۵۸) = ۰٫۵۸$$

$$E(XY) = \sum xy \cdot f(x,y)$$

$$= (۰ \times ۰ \times ۰٫۰۵) + (۰ \times ۱ \times ۰٫۱۸) + \ldots + (۲ \times ۱ \times ۰٫۰۵) = ۰٫۴۵$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = ۰٫۴۵ - (۰٫۹۷ \times ۰٫۵۸) = -۰٫۱۱۲۶$$

چون مقدار کوواریانس منفی است، از این رو با افزایش یک متغیر، دیگری کاهش می‌یابد.

۱-۱۴-۳ ویژگی‌های کوواریانس

۱) خاصیت تقارن:

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$

۲) برای مقدار ثابت k:

$$Cov(X,k) = ۰$$

۳) تغییر واحد اندازه‌گیری (فرض کنید a و b مقدارهایی ثابت باشند):

$$Cov(aX,bY) = ab \cdot Cov(X,Y)$$

۴) تغییر مبدأ:

$$Cov(aX+b,cY+d) = ac \cdot Cov(X,Y)$$

۵) جمع‌پذیری:

$$Cov(X+Z,Y) = Cov(X,Y) + Cov(Z,Y)$$

۶) بیان کوواریانس بر حسب واریانس:

$$Cov(X,X) = Var(X)$$

۷) اگر X و Y مستقل از یک‌دیگر باشند، $Cov(X,Y) = ۰$ ولی نمی‌توان گفت اگر $Cov(X,Y) = ۰$، دو متغیر X و Y مستقل از یک‌دیگرند. ممکن است دو متغیر X و Y به‌صورت غیرخطی با یک‌دیگر وابسته و کوواریانس آن دو صفر باشد.

۸) از ویژگی ۷ می‌توان نتیجه گرفت که اگر X و Y مستقل از یک‌دیگر باشند، آن‌گاه:

$$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

ولی نمی‌توان گفت: اگر $E(XY) = E(X)E(Y)$، دو متغیر X و Y مستقل از یک‌دیگرند.

مثال ۵۴ اگر $Cov(X, Y) = ۴$، آن‌گاه $Cov(۲ + ۳X, ۴ + ۵Y)$ را بیابید.

حل.

$$Cov(۲ + ۳X, ۴ + ۵Y) = ۳ \times ۵Cov(X, Y) = ۳ \times ۵ \times ۴ = ۶۰$$

مثال ۵۵ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل از هم و هم توزیع با واریانس‌های مشترک ۹ باشند. کوواریانس‌های متغیرهای تصادفی $V = ۲x - y$ و $U = x + ۲y$ را به‌دست آورید.

حل.

$$\begin{aligned}
Cov(U, V) &= Cov(x + ۲y, ۲x - y) \\
&= Cov(x, ۲x) + Cov(x, -y) + Cov(۲y, ۲x) + Cov(۲y, -y) \\
&= ۲Cov(x, x) - Cov(x, y) + ۴Cov(y, x) - ۲Cov(y, y) \\
&= ۲Var(x) - Cov(x, y) + ۴Cov(y, x) - ۲Var(y) \\
&= ۲\ Var(x) + ۳Cov(x, y) - ۲Var(y) = (۲ \times ۹) + (۳ \times ۰) - (۲ \times ۹) = ۰
\end{aligned}$$

۳-۱۵ ضریب همبستگی

مقدار کوواریانس به واحدهای اندازه‌گیری X و Y بستگی دارد. در نتیجه تغییر در یکی از متغیرهای X و Y در محاسبه‌ی $Cov(X,Y)$ دخالت می‌کند. معیاری که تحت تأثیر واحدهای اندازه‌گیری X و Y نباشد، «ضریب همبستگی» است که به‌منظور تعیین شدت همبستگی بین دو متغیر X و Y استفاده می‌شود. برای محاسبه‌ی آن کافی است که کوواریانس X و Y را بر حاصل‌ضرب انحراف معیارهای X و Y تقسیم کنیم:

$$\boxed{\rho(X,Y) == \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

علامت ضریب همبستگی فقط بستگی به علامت کوواریانس دارد.

نکته ۱۷ به‌طور کلی:

- اگر $\rho = ۱$، همبستگی کامل و مستقیم است.
- اگر $\rho = -۱$، همبستگی کامل و معکوس است.
- اگر $\rho = ۰$، همبستگی خطی بین دو صفت وجود ندارد.
- اگر $۰ < \rho < ۱$، همبستگی ناقص و مستقیم است.
- اگر $-۱ < r < ۰$، همبستگی ناقص و معکوس است.

مثال ۵۶ اگر X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع زیر باشند، ضریب همبستگی بین دو متغیر X و Y را بیابید و درباره‌ی نوع همبستگی توضیح دهید.

$X \backslash Y$	۳	۷	$g(x)$
۲	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
۵	$\frac{۲}{۳}$	۰	$\frac{۲}{۳}$
$h(y)$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۱

حل.

$$E(X) = \sum x \cdot g(x) = (۲ \times \frac{۱}{۳}) + (۵ \times \frac{۲}{۳}) = ۴$$

$$E(Y) = \sum y \cdot h(y) = (۳ \times \frac{۲}{۳}) + (۷ \times \frac{۱}{۳}) = \frac{۱۳}{۳}$$

$$E(XY) = \sum xy \cdot f(x,y)$$

$$= (۲ \times ۳ \times ۰) + (۲ \times ۷ \times \frac{۱}{۳}) + (۵ \times ۳ \times \frac{۲}{۳}) + (۵ \times ۷ \times ۰) = \frac{۴۴}{۳}$$

$$Var(X) = \sum x^۲ \cdot g(x) - [E(X)]^۲ = (۴ \times \frac{۱}{۳}) + (۲۵ \times \frac{۱}{۳}) - (۴)^۲ = ۲ \; ; \; \sigma_X = \sqrt{۲}$$

$$Var(Y) = \sum y^۲ \cdot h(y) - [E(Y)]^۲ = (۹ \times \frac{۲}{۳}) + (۴۹ \times \frac{۱}{۳}) - (\frac{۱۳}{۳})^۲ = \frac{۳۲}{۹} \; ; \sigma_Y = \frac{\sqrt{۳۲}}{۳}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{۴۴}{۳} - (۴ \times \frac{۱۳}{۳}) \approx -\frac{۸}{۳}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{-\frac{۸}{۳}}{\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۳۲}}{۳}} = -۱$$

چون $\rho = -۱$ همبستگی بین X و Y، کامل و معکوس است.

مثال ۵۷ در بررسی اندازه‌های دو متغیر Y و X، انحراف معیار X برابر ۳، و انحراف معیار Y برابر ۵ و ضریب همبستگی بین Y و X برابر ۰٫۸ حاصل شده است. کوواریانس آن‌ها را بیابید.

حل.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \; ; \; \frac{۸}{۱۰} = \frac{Cov(X,Y)}{۳ \times ۵} \; ; \; Cov(X,Y) = ۱۲$$

نکته ۱۸ اگر X و Y مستقل باشند، آن‌گاه $\rho(X,Y) = ۰$؛ زیرا صورت کسر یعنی $Cov(X,Y)$ برابر صفر است. عکس این قضیه درست نیست.

نکته ۱۹ $\rho(X,Y)$ به‌صورتی تقریبی چگونگی ارتباط خطی بین X و Y و جهت آن را تعیین می‌کند.

$\rho(X,Y) = ۱$، اگر $Y = aX + b$ و $a > ۰$.

$\rho(X,Y) = -۱$، اگر $Y = aX + b$ و $a < ۰$.

پس در حالت خطی کامل داریم $\rho(X,Y) = \pm ۱$ و در حالت استقلال X و Y، $\rho(X,Y) = ۰$. اگر $\rho(X,Y) = ۰$، X و Y ناهمبسته هستند. به عبارت دیگر گرایش خطی میان X و Y ناچیز است. بنابراین ناهمبستگی مستلزم مستقل بودن X و Y نمی‌باشد.

۳-۱۵-۱ خواص ضریب همبستگی:

$$۱)\ -۱ \leq \rho(X,Y) \leq ۱ \qquad ۲)\ \rho(X,Y) = \pm ۱ \Leftrightarrow \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \mp \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} = ۰$$

$$۳)\ \rho(aX+b, cY+d) = \begin{cases} +\rho(X,Y) & \text{و } c \text{ هم‌علامت باشند } a \\ -\rho(X,Y) & \text{و } c \text{ هم‌علامت نباشند } a \end{cases}$$

مثال ۵۹ اگر $\sigma_X^۲ = ۱۶$، $\sigma_Y^۲ = ۲۵$ و $Cov(X,Y) = -۱۰$، مطلوب است محاسبه‌ی $\rho(۲X+۳, ۳Y-۱)$.

حل. طبق خاصیت (۳) داریم:

$$\rho(۲X+۳, ۳Y-۱) = \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{-۱۰}{۴ \times ۵} = -۰/۵$$

۳-۱۶ توابع متغیرهای تصادفی

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، آن‌گاه $Z = aX + bY + c$ نیز یک متغیر تصادفی است که امید ریاضی و واریانس آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E(Z) = E(aX+bY+c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$Var(Z) = Var(aX+bY+c) = a^۲Var(X) + b^۲Var(Y) + ۲ab \cdot Cov(X,Y)$$

نکته ۲۰ اگر دو متغیر تصادفی X و Y مستقل از یک‌دیگر باشند و $Z = aX + bY + c$، آن‌گاه:

$$E(Z) = E(aX+bY+c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
$$Var(Z) = Var(aX+bY+c) = a^۲Var(X) + b^۲Var(Y)$$

مثال ۶۰ اگر X و Y متغیرهای تصادفی و $E(X) = ۲$ و $E(Y) = ۳$، امید ریاضی متغیر تصادفی $Z = ۲X - Y + ۴$ چقدر است؟

حل.

$$E(Z) = E(۲X - Y + ۴) = ۲E(X) - E(Y) + ۴ = (۲ \times ۲) - ۳ + ۴ = ۵$$

مثال ۶۱ اگر X و Y متغیرهای تصادفی و $Var(X) = ۵$، $Var(Y) = ۳$ و $Cov(X, Y) = ۱$، واریانس متغیر تصادفی $Z = ۳X - ۴Y + ۲$ را معین کنید.

حل.

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var(۳X - ۴Y + ۲) = ۹Var(X) + ۱۶Var(Y) + ۲(۳)(-۴)Cov(X, Y) \\ &= (۹ \times ۵) + (۱۶ \times ۳) - (۲۴ \times ۱) = ۶۹ \end{aligned}$$

مثال ۶۲ اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و $\sigma_X^۲ = ۳$ و $\sigma_Y^۲ = ۲$، واریانس متغیر تصادفی $Z = -۲X + ۳Y + ۱$ را بیابید.

حل.

$$\sigma_Z^۲ = \sigma_{(-۲X+۳Y+۱)}^۲ = (-۲)^۲ \cdot \sigma_X^۲ + (۳)^۲ \cdot \sigma_Y^۲ = (۴ \times ۳) + (۹ \times ۲) = ۳۰$$